Замечание. В этой методичке будет много выкладок и конечный результат в них сходится с Л-Л, хоть он и считает иначе. Поэтому если вы считаете, что ответ у меня неправильный,

Ну давай, скажи мне, что я не прав

В прошлый раз тело покоилось. Займёмся теперь вопросами движения в метрике Шварцшильда.
Будем считать, что тело движется только вдоль радиуса, т.е. у нас всего две переменных- r и ct:
 (Да, если добавить больше координат, то и мы перигелий Меркурия выведем. Но в двух координатах будет и выкладок меньше, а наглядности больше).

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dct^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}$$

$$S = \int_A^B ds = \int_A^B \frac{ds}{dct} dct = \int_A^B L dct$$

где лагранжиан L

$$L = \sqrt{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) - \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \beta^2} = \sqrt{R - \frac{\beta^2}{R}}$$

Мы ввели $R = 1 - \frac{r_g}{r}$.
Уравнение геодезической найдём из уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial}{\partial ct}\left(\frac{\partial L}{\partial \beta}\right) = \frac{\partial L}{\partial r}$$

Правую часть распишем как

$$\frac{\partial}{\partial ct}\left(\frac{\partial L}{\partial \beta}\right) = \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{\partial L}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial r}$$

Подсчитаем каждую из производных:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -\frac{\beta}{LR}$$

$$\frac{\partial L}{\partial R} = \frac{1+\frac{\beta^2}{R^2}}{2L}$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{r_g}{r^2}$$

Подставляем:

$$\frac{\partial}{\partial ct}\left(-\frac{\beta}{LR}\right) = \frac{1+\frac{\beta^2}{R^2}}{2L} * \frac{r_g}{r^2}$$

L явно не зависит от ct, поэтому выносится из-под производной и сокращается:

$$\frac{\partial}{\partial ct}\left(-\frac{\beta}{R}\right) = \frac{1+\frac{\beta^2}{R^2}}{2} * \frac{r_g}{r^2}$$

И это хорошо знакомый нам закон Ньютона:

$$a = \frac{d^2 r}{dct^2} = \frac{d\beta}{dct} = -\frac{GM}{c^2 r} = -\frac{r_g}{2r^2}$$

Действительно, $R = 1 - \frac{r_g}{r}$ для больших r примерно 1. Подставив R=1 в

$$\frac{\partial}{\partial ct}\left(-\frac{\beta}{R}\right) = \frac{1+\frac{\beta^2}{R^2}}{2} * \frac{r_g}{r^2}$$

и получим закон гравитации Ньютона.

Теперь давайте получим закон движения. У Ньютона он был бы:

$$\frac{d\beta}{dct} = -\frac{r_g}{2r^2}, dct = -\frac{dr}{\beta} => \frac{\beta d\beta}{dr} = -\frac{r_g}{2r^2} => d\beta^2 = -r_g\frac{dr}{r^2} =>$$

$$d\beta^2 = r_g d\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\beta = \sqrt{r_g\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

В ОТО, конечно, будет сложнее. Запасайтесь попкорном

, чипсами 

Поехали.

Во-первых, избавимся от времени, заметим, что $dct = \frac{dr}{\beta}$:

$$\frac{d\left(\frac{\beta}{R}\right)}{dr}(-\beta) = \frac{1+\frac{\beta^2}{R^2}}{2} * \frac{r_g}{r^2}$$

Сделаем замену:

$$\frac{-\beta}{R} = K$$

$$\frac{dK}{dr}KR = \frac{1+K^2}{2} * \frac{r_g}{r^2}$$

Перенесём dr в правую часть:

$$KR * dK = \frac{1+K^2}{2} * \frac{r_g}{r^2}dr$$

Вспомним, что мы определяли R как $R = 1 - \frac{r_g}{r} => \frac{r_g}{r^2}dr = dR$, поэтому

$$KR * dK = \frac{1+K^2}{2} * dR$$

Делим переменные:

$$\frac{2KdK}{1+K^2} = \frac{dR}{R}$$

$$dln(1+K^2) = dln(R)$$

$$d\left(\frac{R}{1+K^2}\right) = 0$$

Обозначим

$$R_0 = \frac{R}{1+K^2}$$

Тогда

$$\frac{R}{R_0} = 1 + K^2$$

$$\sqrt{\frac{R}{R_0}-1}=K$$

$$R\sqrt{\frac{R}{R_0}-1}=-\beta$$

Зависимость беты от R. Заметим, что $\beta=0 \Leftrightarrow R=R_0$, т.е. R_0 – значение R в момент, когда тело «отпускают».

Помним, что R – это не r:

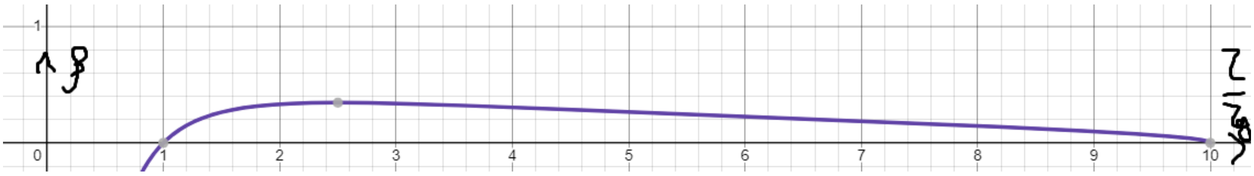
$$R=1-\frac{r_g}{r}$$

Так что

$$-\beta=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\sqrt{\frac{1-\frac{r_g}{r}}{1-\frac{r_g}{r_0}}-1}=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\sqrt{\frac{\frac{r_g}{r}-\frac{r_g}{r_0}}{1-\frac{r_g}{r_0}}}$$

Где r_0- начальный радиус.

Построим график. Пусть $r_0=10r_g$, т.е. мы отпустили тело на расстоянии 10 радиусов Шварцшильда:



Для сравнения решение задачи о падении на центр от Исаака Ньютона:

$$\frac{d\beta}{dct}=-\frac{r_g}{2r^2}$$

$$\frac{\beta d\beta}{dr}=-\frac{r_g}{2r^2}$$

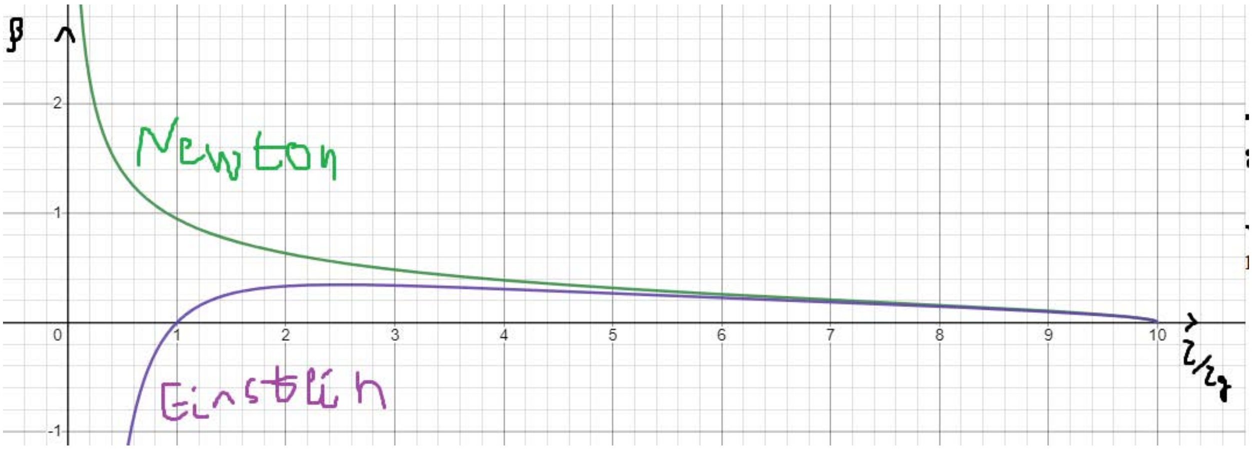
$$d\beta^2=r_g d\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\beta^2=r_g\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)$$

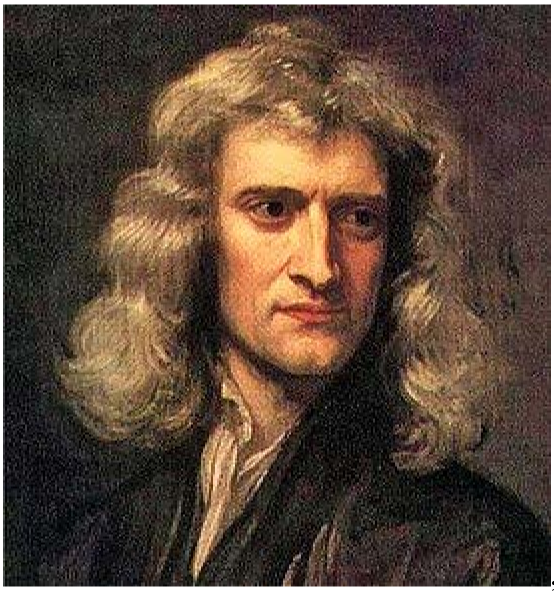
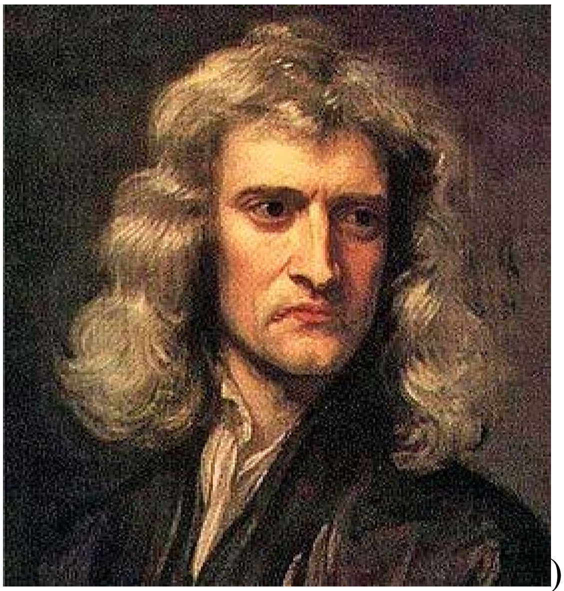
$$-\beta=\sqrt{r_g\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)}=\sqrt{\frac{r_g}{r}-\frac{r_g}{r_0}}$$

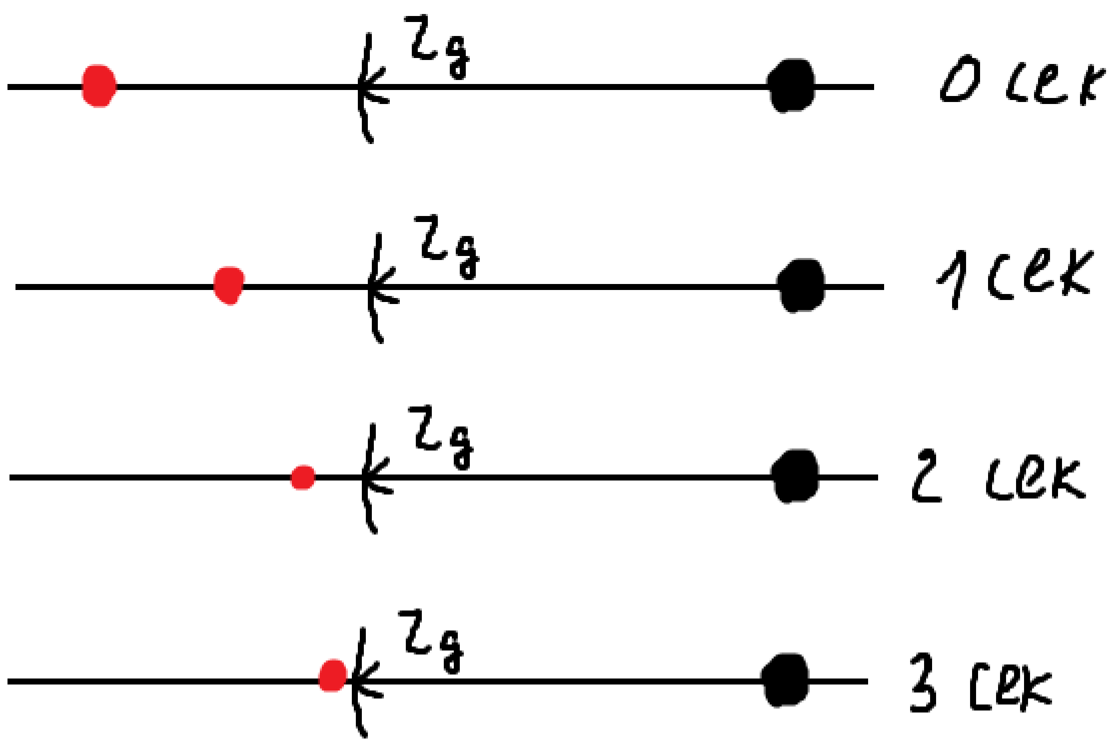
Сравним с ОТО:

$$-\beta=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\sqrt{\frac{\frac{r_g}{r}-\frac{r_g}{r_0}}{1-\frac{r_g}{r_0}}}$$



https://www.desmos.com/calculator/rbllzyamfy

Очень интересный результат – до экстремума тело набирает бету (всё по Ньютону) , а потом скорость начинает падать (Ньютон расстроился )! А при $r=r_g$ бета и вовсе становится нулевой. Получается, что тело останавливается. На самом деле оно не просто останавливается, оно бесконечно долго падает на шварцшильдову сферу:



Падение происходит по экспоненте с отрицательным аргументом (в этом легко убедиться, исследовав асимптотику).

Вот так и работает чёрная дыра. У нормальных массивных тел ничто не может подойти к шварцшильдовой сфере, потому что она слишком мала. Для Солнца, например, 3 км – это меньше, чем радиус Солнца! Однако если засунуть всю массу Солнца в сферу радиусом 3 км, это будет чёрная дыра.

Отметим, что если мы окажемся на теле, которое катится в чёрную дыру, то там мы без проблем шварцшильдову сферу пересечём. Для этого нужно связать не r и ct, а r и собственное время cτ:

$$dct^2 = \frac{dr^2}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^2\left(\frac{\frac{r_g}{r}-\frac{r_g}{r_0}}{1-\frac{r_g}{r_0}}\right)}$$

$$R\sqrt{\frac{R}{R_0}-1}\,dct = -dr => dct = -\frac{dr}{R\sqrt{\frac{R}{R_0}-1}} => dct^2 = -\frac{dr^2}{R^2\left(\frac{R}{R_0}-1\right)}$$

При этом

$$ds^2 = Rdct^2 - \frac{dr^2}{R} = dc\tau^2$$

Подставляем dct и ищем зависимость r от собственного времени cτ:

$$dr^2\left(\frac{R}{R^2\left(\frac{R}{R_0}-1\right)}-\frac{1}{R}\right)=dc\tau^2$$

$$\frac{dr^2}{R}\left(\frac{1}{\frac{R}{R_0}-1}-1\right)=dc\tau^2$$

$$\frac{dr^2}{R}\left(\frac{1}{\frac{R}{R_0}-1}-\frac{\frac{R}{R_0}-1}{\frac{R}{R_0}-1}\right)=dc\tau^2$$

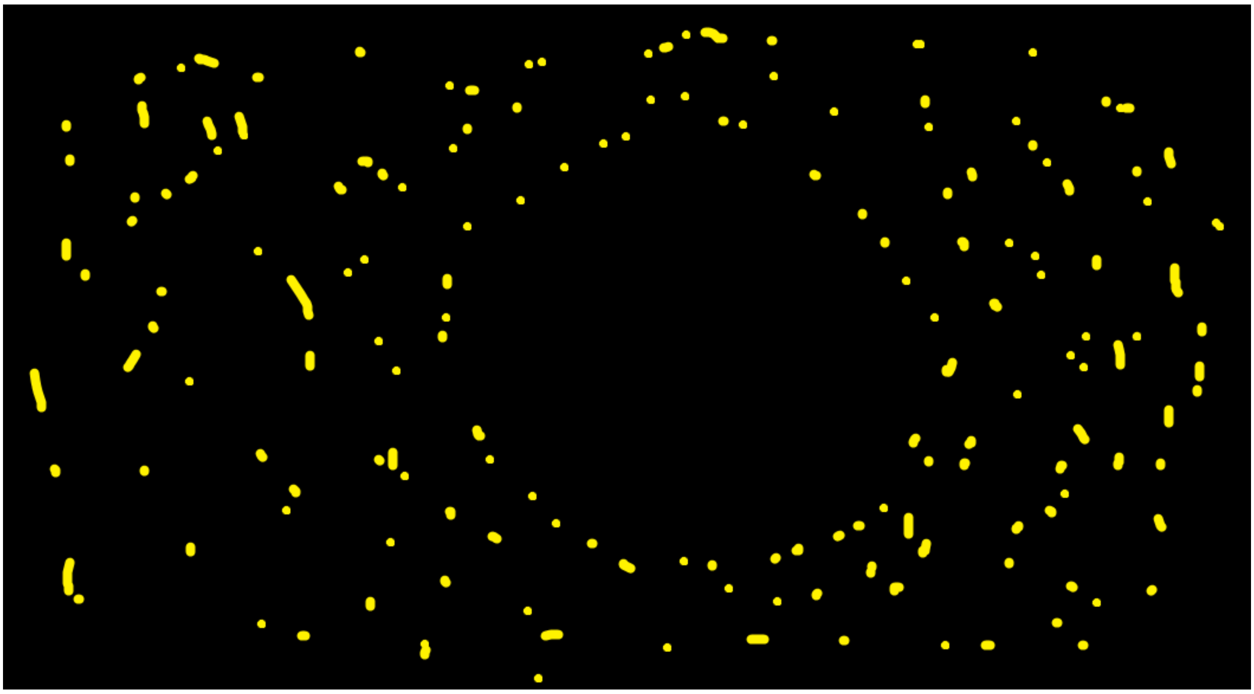
$$\frac{dr^2}{R}\left(\frac{2-\frac{R}{R_0}}{\frac{R}{R_0}-1}\right)=dc\tau^2$$

$$\frac{dr^2}{R}\left(\frac{2R_0-R}{R-R_0}\right)=dc\tau^2$$

$$\frac{dr^2}{1-\frac{r_g}{r}}\left(\frac{1-2\frac{r_g}{r_0}+\frac{r_g}{r}}{\frac{r_g}{r_0}-\frac{r_g}{r}}\right)=dc\tau^2$$

А теперь надо вот это проанализировать. Я на этом моменте что-то уже всё, но вы можете досчитать.

Вот такие они – чёрные дыры. Были предсказаны теоретиками, а потом астрономы, наблюдая за звёздами, обнаружили там вот такую картину:



Правда, радиус тёмного пятна – не совсем радиус Шварцшильда, а $\frac{3\sqrt{3}}{2}r_g$. Но это невааааажно! Ну разве ОТО не прекрасна?

Кстати, вот вам для сравнения решение задачи о падении на центр от Исаака Ньютона:

$$\frac{d\beta}{dct} = -\frac{r_g}{2r^2}$$

$$\frac{\beta d\beta}{dr} = -\frac{r_g}{2r^2}$$

$$d\beta^2 = r_g d\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\beta^2 = r_g\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$$-\beta = \sqrt{r_g\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} = \sqrt{\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_0}}$$

Сравним с ОТО:

$$-\beta = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\sqrt{\frac{\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_0}}{1 - \frac{r_g}{r_0}}}$$